第26卷 第6期 工 程 数 学 学 报 Vol. 26 No. 6
2009年12月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Dec. 2009

文章编号:1005-3085(2009)06-1027-06

一类三阶两点边值问题单调迭代正解的存在性*

孙 博

(中央财经大学应用数学学院，北京 100081)

摘 要: 本文利用锥上的不动点理论和单调迭代的方法研究了一类三阶两点边值问题单调迭代正解的存在性，得到了正解存在的充分条件，同时也给出了解的相应迭代序列来逼近解，并且给出了应用实例。值得一提的是，本文所讨论的边值问题中，非线性项显含未知函数的一阶和二阶导数。

关键词: 正解；迭代解；锥；三阶两点边值问题

分类号: AMS(2000) 34B15 **中图分类号**: O175.8 **文献标识码**: A

1 引言

本文考虑如下三阶两点边值问题

$$u'''(t)+q(t)f(t,u(t),u'(t),u''(t))=0,\quad t\in(0,1), \tag{1}$$

$$u(0)=u'(0)=u''(1)=0 \tag{2}$$

单调迭代正解的存在性。这里所研究的边值问题的正解 $u^\star$ 是指 $u^\star(t)>0,\ 0<t<1$。

三阶非线性常微分方程在应用数学、物理以及力学领域中有着广泛的应用背景，因而也受到很多作者的关注，可参看文 [1-7] 及其相关文献。研究三阶微分方程边值问题所用的方法很多，常用的有 Krasnoselskii 锥拉伸锥压缩不动点定理、不动点指标理论、微分不等式理论以及上下解方法等等。然而，值得一提的是，在文 [1-7] 以及很多相关文献当中，大多数的结论都是在一定条件下得到边值问题解、正解的存在性，由此，我们对“知道解的存在而如何找到解”颇感兴趣。在以往的众多文献当中，这方面的讨论不多见。

因此，本文将利用单调迭代方法来考虑边值问题 (1)-(2)。在一定条件下，我们不仅得到了所研究问题的正解的存在性，同时也给出了迭代序列来逼近解。

2 相关概念

本节我们介绍一些基本概念。

定义 2.1 设 E 是一个 Banach 空间，$P\subset E$ 非空，且满足，

(i) $au+bv\in P$，对于任意的 u, $v\in P$，$a\geq 0$，$b\geq 0$ 成立；

(ii) 如果 u, $-u\in P$，则必有 $u=0$；则称 P 是 E 的一个锥。

定义 2.2 一个映射 α，如果对于任意的 u, $v\in P$，$t\in[0,1]$，有

$$\alpha(tu+(1-t)v)\leq t\alpha(u)+(1-t)\alpha(v),$$

收稿日期: 2007-04-16. **作者简介**: 孙博 (1983年3月生)，女，博士. 研究方向：微分方程边值问题.

***基金项目**: 国家自然科学基金 (10671012)；国家教育部基金 (20050007011).

则称 α 是 P 上的凸泛函。

3　主要结果

令 Banach 空间 $E=C^2[0,1]$，定义其上范数为

$$\|u\|:=\max\left\{\max_{0\le t\le 1}|u(t)|,\ \max_{0\le t\le 1}|u'(t)|,\ \max_{0\le t\le 1}|u''(t)|\right\}.$$

记 $E_+=C_+^2[0,1]=\{u\in E\mid u(t)\ge 0,\, t\in[0,1]\}$，且定义锥 $P\subset E$ 为

$$P=\{u\in E\mid u(t)\ge 0,\ \text{且}\ u\ \text{是}\ [0,1]\ \text{上不减的凸泛函}\}.$$

以下的讨论中，总假设下列条件成立。

(H)　$f(t,x,y,z)\in C([0,1]\times[0,+\infty)\times[0,+\infty)\times[0,+\infty)\to[0,+\infty))$，$q(t)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的非负连续泛函，且在 (0,1) 的任意测度不为零的子区间上 $q(t)\neq 0$。

引理 3.1　令 $g\in L^1[0,1]$，则如下边值问题

$$\begin{cases} u'''(t)+g(t)=0, & 0<t<1,\\ u(0)=u'(0)=u''(1)=0 \end{cases}$$

有唯一解

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)g(s)\mathrm{d}s,$$

其中，

$$G(t,s)=\begin{cases} \frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}(t-s)^2, & 0\le s\le t\le 1,\\ \frac{1}{2}t^2, & 0\le t\le s\le 1. \end{cases} \tag{3}$$

易知，$0\le G(t,s)\le G(1,s)=s(1-\frac{1}{2}s)$。

定义算子 $T:P\to E$ 为

$$(Tu)(t)=\int_0^1 G(t,s)q(s)f(s,u(s),u'(s),u''(s))\mathrm{d}s, \tag{4}$$

则由引理 3.1 知，边值问题 (1)-(2) 有解 $u=u(t)$ 当且仅当 u 是 T 的不动点。

引理 3.2　(4) 中定义的算子 $T:P\to P$ 是全连续算子。

证明　由 T 的定义易知，对于任意的 $u\in P$，有 $Tu\in C^2[0,1]$ 并且满足 (2)。又因

$$(Tu)''(t)=\int_t^1 q(s)f(s,u(s),u'(s),u''(s))\mathrm{d}s, \tag{5}$$

$$(Tu)'(t)=\int_0^t sq(s)f(s,u(s),u'(s),u''(s))\mathrm{d}s+\int_t^1 tq(s)f(s,u(s),u'(s),u''(s))\mathrm{d}s. \tag{6}$$

因此，可得 $(Tu)''(t)\ge 0$，$(Tu)'(t)\ge 0$，$0\le t\le 1$。所以，Tu 是凸的，且 $(Tu)(t)$ 在 [0,1] 上不减。也即，$T:P\to P$。进一步，利用 Arzela-Ascoli 定理易知，T 是紧算子。从而得到，$T:P\to P$ 是全连续算子。

本文的主要结论如下：

定理3.1 假设(H)成立，而且存在常数$a > 0$，使得

(H1) $f(t, x_1, y_1, z_1) \le f(t, x_2, y_2, z_2)$对于任意的$0 \le t \le 1$，$0 \le x_1 \le x_2 \le a$，$0 \le y_1 \le y_2 \le a$，$0 \le z_1 \le z_2 \le a$；

(H2) $\max\limits_{0\le t\le 1} f(t, a, a, a) \le \frac{a}{A}$，其中$A = \max\limits_{0\le t\le 1} q(t)$；

(H3) $f(t, 0, 0, 0) \ne 0$在(0,1)上的任意测度不为零的子空间上成立；则边值问题(1)-(2)有两个单调不减的凸的正解w^*和v^*，使得

$$0 < w^* \le a, \quad 0 \le (w^*)' < a, \quad 0 \le (w^*)'' < a,$$

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} T^n w_0 = w^*, \quad \lim_{n\to\infty} (w_n)' = \lim_{n\to\infty} (T^n w_0)' = (w^*)',$$

$$\lim_{n\to\infty} (w_n)'' = \lim_{n\to\infty} (T^n w_0)'' = (w^*)'', \quad \text{其中} \quad w_0(t) = \frac{1}{2} a t^2, \ \ 0 \le t \le 1.$$

$$0 < v^* \le a, \quad 0 \le (v^*)' < a, \quad 0 \le (v^*)'' < a,$$

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} T^n v_0 = v^*, \quad \lim_{n\to\infty} (v_n)' = \lim_{n\to\infty} (T^n v_0)' = (v^*)',$$

$$\lim_{n\to\infty} (v_n)'' = \lim_{n\to\infty} (T^n v_0)'' = (v^*)'', \quad \text{其中} \quad v_0(t) = 0, \ \ 0 \le t \le 1.$$

其中T如(4)定义。此定理当中的迭代序列为$w_0(t) = \frac{1}{2} a t^2$，$w_{n+1} = T w_n = T^n w_0$，$n = 0, 1, 2, \cdots$和$v(0) = 0$，$v_{n+1} = T v_n = T^n v_0$，$n = 0, 1, 2, \cdots$。他们分别是从一个已知的简单二次函数和零函数开始迭代的。

证明 由引理3.2知，$T : P \to P$是全连续的，且T在P中的不动点是边值问题(1)-(2)的解。记$\bar{P}_a = \{u \in P \mid \|u\| \le a\}$，下面先来证明$T : \bar{P}_a \to \bar{P}_a$。

若$u \in \bar{P}_a$，则由(H1),(H2)可得

$$0 \le f(t, u(t), u'(t), u''(t)) \le f(t, a, a, a) \le \max_{0\le t\le 1} f(t, a, a, a) \le \frac{a}{A}, \quad 0 \le t \le 1.$$

因为

$$\begin{aligned} \|Tu\| &= \max\left\{ \max_{0\le t\le 1} |(Tu)(t)|, \ \max_{0\le t\le 1} |(Tu)'(t)|, \ \max_{0\le t\le 1} |(Tu)''(t)| \right\} \\ &= \max\{(Tu)(1), \ (Tu)'(1), \ (Tu)''(0)\}, \end{aligned}$$

而由(4),(5),(6)得

$$(Tu)(1) = \int_0^1 G(1, s) q(s) f(s, u(s), u'(s), u''(s)) \mathrm{d}s \le \frac{a}{A} \frac{1}{2} \max_{0\le t\le 1} q(t) < a,$$

$$(Tu)'(1) = \int_0^1 s q(s) f(s, u(s), u'(s), u''(s)) \mathrm{d}s \le \frac{a}{A} \max_{0\le t\le 1} q(t) = a,$$

$$(Tu)''(0) = \int_0^1 q(s) f(s, u(s), u'(s), u''(s)) \mathrm{d}s \le \frac{a}{A} \max_{0\le t\le 1} q(t) = a.$$

因此，可得$\|Tu\| \le a$。故$T : \bar{P}_a \to \bar{P}_a$。

对任意的$u_i \in P$ $(i = 1,2)$且$u_1 \le u_2$，$u_1' \le u_2'$和$u_1'' \le u_2''$，由(H1)可知，$Tu_1 \le Tu_2$，$(Tu_1)' \le (Tu_2)'$以及$(Tu_1)'' \le (Tu_2)''$。

令$w_0(t) = \frac{1}{2}at^2$，$0 \le t \le 1$，则$w_0(t) \in \bar{P}_a$。令$w_{n+1} = Tw_n = T^n w_0$，$n = 0,1,2,\cdots$，由于$T : \bar{P}_a \to \bar{P}_a$，则$w_n \in T\bar{P}_a \subseteq \bar{P}_a$，$n = 1,2,\cdots$，又因$T$是紧算子，易证$\{w_n\}$是等度连续的。

$$w_1(t) = Tw_0(t) = \int_0^1 G(t,s)q(s)f(s,w_0(s),w_0'(s),w_0''(s))\mathrm{d}s \le \frac{1}{2}at^2 = w_0(t), \quad 0 \le t \le 1,$$

$$\begin{aligned} w_1'(t) = (Tw_0)'(t) = &\int_0^t sq(s)f(s,w_0(s),w_0'(s),w_0''(s))\mathrm{d}s \\ &+ \int_t^1 tq(s)f(s,w_0(s),w_0'(s),w_0''(s))\mathrm{d}s \le at = w_0'(t), \quad 0 \le t \le 1, \end{aligned}$$

$$w_1''(t) = (Tw_0)''(t) = \int_t^1 q(s)f(s,w_0(s),w_0'(s),w_0''(s))\mathrm{d}s \le a = w_0''(t), \quad 0 \le t \le 1.$$

由此

$$w_2(t) = (Tw_1)(t) \le (Tw_0)(t) = w_1(t), \quad w_2'(t) = (Tw_1)'(t) \le (Tw_0)'(t) = w_1'(t),$$

$$w_2''(t) = (Tw_1)''(t) \le (Tw_0)''(t) = w_1''(t), \quad 0 \le t \le 1,$$

归纳可得

$$w_{n+1} \le w_n, \quad w_{n+1}'(t) \le w_n'(t), \quad w_{n+1}''(t) \le w_n''(t), \quad 0 \le t \le 1, \quad n = 0,1,2,\cdots,$$

所以，存在$w^* \in \bar{P}_a$，使得$w_n \to w^*$。利用算子T的连续性可得$Tw^* = w^*$。

令$v_0(t) = 0$，$0 \le t \le 1$，则$v_0(t) \in \bar{P}_a$。令$v_{n+1} = Tv_n = T^n v_0$，$n = 0,1,2,\cdots$，由于$T : \bar{P}_a \to \bar{P}_a$，则$v_n \in T\bar{P}_a \subseteq \bar{P}_a$，$n = 1,2,\cdots$，又因$T$是紧算子，易证$\{v_n\}$是等度连续的。

$$v_1(t) = (Tv_0)(t) = (T0)(t) \ge 0, \quad v_1'(t) = (Tv_0)'(t) = (T0)'(t) \ge 0,$$

$$v_1''(t) = (Tv_0)''(t) = (T0)''(t) \ge 0, \quad 0 \le t \le 1,$$

由此

$$v_2(t) = (Tv_1)(t) \ge (T0)(t) = v_1(t), \quad v_2'(t) = (Tv_1)'(t) \ge (T0)'(t) = v_1'(t),$$

$$v_2''(t) = (Tv_1)''(t) \ge (T0)'(t) = v_1''(t), \quad 0 \le t \le 1,$$

归纳可得

$$v_{n+1} \ge v_n, \quad v_{n+1}'(t) \ge v_n'(t), \quad v_{n+1}''(t) \ge v_n''(t), \quad 0 \le t \le 1, \quad n = 0,1,2,\cdots,$$

所以，存在$v^* \in \bar{P}_a$，使得$v_n \to v^*$。利用算子T的连续性可得$Tv^* = v^*$。

由在(0,1)的任意测度不为零的子空间上$f(t,0,0,0) \ne 0$及(H)可知，$v^*(t) > 0$，$0 < t < 1$。因此，由上所述，w^*和v^*为边值问题(1)(2)的两个单调不减的凸的正解。

由定理3.1易得下列推论成立。

推论 3.1 设 (H), (H1), (H3) 成立，而且存在常数 $a>0$，使得
(H2')

$$\underline{\lim}_{\ell\to+\infty}\max_{0\le t\le 1}\frac{f(t,\ell,a,a)}{\ell}\le\frac{1}{A},$$

特别地，

$$\underline{\lim}_{\ell\to+\infty}\max_{0\le t\le 1}\frac{f(t,\ell,a,a)}{\ell}=0.$$

则边值问题 (1)-(2) 有两个单调不减的凸的正解 w^* 和 v^*，使得定理 3.1 的结论成立。

4 例子

例 令 (1) 中 $q(t)=1$，考虑如下的边值问题

$$u'''(t)+f(t,u(t),u'(t),u''(t))=0,\quad 0<t<1, \tag{7}$$

$$u(0)=u'(0)=u''(1)=0, \tag{8}$$

其中

$$f(t,x,y,z)=-\frac{1}{5}t^2-\frac{2}{5}t+\frac{3}{5}+\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}y+\frac{1}{5}z,$$

选取 $a=2$，易得 $A=1$。因此，$f(t,x,y)$ 满足：

1) 对任何的 $0\le t\le 1$，$0\le x_1\le x_2\le 2$，$0\le y_1\le y_2\le 2$，$0\le z_1\le z_2\le 2$，有 $f(t,x_1,y_1,z_1)\le f(t,x_2,y_2,z_2)$；

2) $\max\limits_{0\le t\le 1} f(t,a,a,a)=f(0,2,2,2)<\frac{a}{A}=2$；

3) $f(t,0,0,0)\not\equiv 0$ 在 (0,1) 上的任意测度不为零的子空间上成立。

则由定理 3.1，则边值问题 (7)-(8) 有两个单调不减的凸的正解 w^* 和 v^*。

对 $n=0,1,2\cdots$ 这里的迭代序列为

$$w_0(t)=t^2,\quad 0\le t\le 1,$$

$$w_1(t)=(Tw_0)(t)=-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}t^2,\quad 0\le t\le 1,$$

$$w_2(t)=(Tw_1)(t)=\frac{1}{3600}t^6+\frac{1}{300}t^5+\frac{1}{60}t^4-\frac{16}{75}t^3+\frac{63}{200}t^2,\quad 0\le t\le 1,$$

$$\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots$$

$$\begin{aligned}w_{n+1}(t)&=(Tw_n)(t)\\&=\int_0^1 G(t,s)\Big(-\frac{1}{5}s^2-\frac{2}{5}s+\frac{3}{5}+\frac{1}{5}w_n(s)+\frac{1}{5}w_n'(s)+\frac{1}{5}w_n''(s)\Big)\mathrm{d}s,\quad 0\le t\le 1.\end{aligned}$$

$$v_0(t)=0,$$

$$v_1(t)=(Tv_0)(t)=\frac{1}{300}t^5+\frac{1}{60}t^4-\frac{1}{10}t^3+\frac{1}{6}t^2,\quad 0\le t\le 1,$$

$$v_2(t) = (Tv_1)(t)$$
$$= -\frac{1}{504000}t^8 - \frac{1}{31500}t^7 - \frac{127}{168000}t^6 + \frac{7}{2250}t^5 + \frac{17}{900}t^4 - \frac{1}{9}t^3 + \frac{857}{4500}t^2, \quad 0 \le t \le 1,$$

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$

$$v_{n+1}(t) = (Tv_n)(t)$$
$$= \int_0^1 G(t,s)\Big(-\frac{1}{5}s^2 - \frac{2}{5}s + \frac{3}{5} + \frac{1}{5}v_n(s) + \frac{1}{5}v_n'(s) + \frac{1}{5}v_n''(s)\Big)\mathrm{d}s, \quad 0 \le t \le 1.$$

他们分别是从一个已知的简单二次函数和零函数开始迭代的。

参考文献:

[1] 葛渭高. 三阶常微分方程的两点边值问题[J]. 高校应用数学学报(A)，1997, (12): 265-272
[2] 冯育强，刘三阳. 非线性三阶边值问题的多解性[J]. 工程数学学报，2003, 20: 109-112
[3] 冯育强，刘三阳，姚庆六. 关于三阶边值问题解的存在性[J]. 应用数学，2003, (16): 108-111
[4] 苏华，王保合. 一类三阶二点半正边值问题的正解及其应用[J]. 工程数学学报，2006, 23: 927-930
[5] 孙永平，张新光. 三阶三点边值问题无穷多个正解的存在性[J]. 工程数学学报，2004, 21: 661-664
[6] 姚庆六. 三阶常微分方程的某些非线性特征值问题的正解[J]. 数学物理学报，2003, (23): 513-519
[7] 冯育强，刘三阳. 一类非线性三阶边值问题的可解性[J]. 工程数学学报，2007, 24(3): 543-546

Existence of Monotonic Iteration Positive Solutions for Three-order Two-point Boundary Value Problems

SUN Bo

(School of Applied Mathematics, Central University of Finance and Economics, Beijing 100081)

Abstract: In this paper, we study the existence of monotonic iteration positive solutions for a kind of three-order two-point boundary value problems, the method mainly depends on the fixed point theory in cones and the iteration technique. We give the sufficient conditions for the existence of positive solutions to the boundary value problem and establish schemes for approximating the solution. An example is also given to illustrate the effectiveness of our results. It is worthwhile to mention that the nonlinear term in the equation we studied involves the first-and second-order derivatives explicitly.

Keywords: positive solution; iteration; cone; three-order two-point boundary value problem